

# Kurt Gödel: Na okraji rozumu

Vladimír Albrecht

**Albert Einstein o Kurtu Gödelovi prohlásil, že to byl nejvýznamnější logik od dob Aristotela. Vynikající životopis tohoto brněnského rodáka napsal Stephen Budiansky, vyšel v nakladatelství Host v roce 2023.[1]**

**N**apsat životopis geniálního matematika tak, aby i širší (tedy i nematematická) veřejnost měla příležitost pochopit význam Gödelových výsledků, které před zhruba sto lety zaskočily i vrcholné osobnosti tehdejšího matematického bádání, je velice náročné. Americký spisovatel Stephen Budiansky se však této úlohy zhostil skutečně excelentně. Měl k tomu předpoklady: kvůli tématům svých knih bývá vnímán jako historik, nicméně vystudoval chemii na Yalově univerzitě (s oceněním „summa cum laude“) a následně matematiku na Harvardově univerzitě. Jeho kniha byla dosud přeložena do sedmi jazyků (včetně čínštiny). Anglický název zní *Journey to the edge of reason*, tedy Cesta k okraji rozumu, a tak je životopis i koncipován: zasvěceně popisuje prostředí, jímž Gödel prošel až k okraji rozumu. Pokud trpíte předpojatostí, že „tato kniha není nic pro mne“, pak se ochudíte o čtenářský zážitek právě z té cesty. Nabízím proto dříve, než se pokusím osvětlit, co je onen „okraj, který rozum už nemůže překročit“, pár charakteristik té cesty.

Kurt se narodil v Brně (1906) v dobře situované německé evangelické rodině. Pro svou zvědavost a dotěrné otázky „jak co funguje“ měl už čtyřletý Kurt v rodině přezdívku „Herr Warum“. Odmala tak usiloval o odhalení principů určujících „fungování vesmíru“ (aby ve zralém věku dokonce podal jisté řešení Einsteinových rovnic). Jeho světem byla matematika, mnohými považovaná za specifický výplod čistě lidského ducha, kterou však on považoval za popis reality, tedy že matematické teorie, stejně jako teorie fyzikální, objevují povahu reality, která existuje nezávisle na člověku. Kurt „celoživotně otevřeně opovrhoval těmi, kteří místo pravé náboženské víry upřednostňují dodržování absurdní církevní doktríny“. Byl přesvědčen, že právě v „hodinách náboženství (na katolické základní škole) byl položen základ Einsteinova hledání jednotné teorie pro celý vesmír“, a stýskal si, že jemu se tak zajímavé výuky nedostalo. Nicméně v jeho zápisníku stojí: „náboženství jsou z větší části špatná, ale víra nikoli“. Byl přesvědčen, že „nic se neděje bez důvodu“, což Budiansky interpretuje jako potvrzení Gödelova ultraracionalismu, avšak též jako recept „na naprostou paranoiu“, která ho zřejmě sužovala v závěru života.

## Vlastnosti systému

Kurt vystudoval brněnské reálné gymnázium s německým vyučovacím jazykem a byl jediným studentem, který neuměl ani jediné slovo česky: místo hodin českého jazyka si vybral těsnopis, který pak celoživotně používal pro záznam svých filosofických úvah a psaní deníku. V roce 1924 odešel do Vídně, kde už jeho bratr studoval medicínu. Budiansky charakterizuje Vídeň roku 1924 jako „hlavu bez těla“, neboť to bylo centrum, kde se scházely významné osobnosti. Byli to nejen spisovatelé (např. H. Broch, R. Musil atd.), ale Gödel se zde seznámil i se slavnými matematiky a filosofy vědy, uvedme alespoň Karla Mengera, Rudolfa Carnapa, Alfreda Tarského a Karla Poppera. Koncentrace osobností vyvolala myšlenkové vření, jehož mainstreamem byl novopozitivismus, který posouval hranice filosofie do „přísného světa vědy“. Důležitost matematiky rostla a Budiansky uvádí výrok uznávaného německého matematika Davida Hilberta z univerzity v Göttingen (byla považována za světovou metropoli matematiky), že „v matematice není nic nepoznatelného“ (sic!). Ani vídeňská univerzita, na níž Gödel začal (1926) studovat matematiku, nehrála žádné druhé housle. Vedoucím jeho doktorské práce se stal Hans Hahn, který vedl seminář o opus magnum matematiky, tj. o díle Principia Mathematica, jehož velevázení autoři Bertrand Russell a Alfred North Whitehead chtěli ukázat, že celá matematika je vlastně odvozena z axiomů logickými výroky. Gödel přijal Hahnovo pozvání do filosofického Vídeňského kroužku, ale nemohl se zde „smířit s pozitivistickým přesvědčením, že poznání pochází výhradně z empirického pozorování přírodních jevů“, tedy že poznání lze redukovat na ověřitelná fakta a čistou logiku. Současně v Carnapově deníku stojí, že mu Gödel řekl, že „nechápe, proč by abstraktní matematické pojmy jako nekonečno měly být zdůvodněny na základě jejich empirické aplikace na fyzikální realitu“. Gödel zkrátka věřil, že tyto pojmy popisují realitu existující nezávisle na člověku (stejně jako třeba fyzika popisuje gravitaci). – V podkapitole „Vratké základy“ (ve 4. kapitole) Budiansky ukazuje, jak studie z teorie nekonečných množin vyústila v diskusi, která stále →

→ naléhavěji vedla k závěru, že matematika stojí na vratkých základech.

David Hilbert prosazoval stanovisko, že základem matematiky je právě teorie množin, kterou předložil Georg Cantor, a z ní jsou všechna matematická tvrzení správně logicky odvozena, tedy že matematika je správný systém. Ovšem holandský matematik Luitzen Egbertus Jan Brouwer poukázal na to, že je zásadní rozdíl mezi prokázáním, že systém je správný, tj. že z jeho axiomů nelze odvodit nepravdivé tvrzení, a prokázáním, že je bezesporný, tedy že z jeho axiomů nelze odvodit jak tvrzení, tak i jeho negaci. Hilbertův program rozvoje matematiky byl čistě syntaktický. Gödel to charakterizoval tak, že v Hilbertově systému se nemusíme starat o význam symbolů daného systému, neboť pravidla odvozování se k významu vlastně nikdy nevztahují – dokážeme-li tvrzení A a také dokážeme, že A implikuje tvrzení B, pak jsme oprávněni tvrdit B, aniž se musíme zabývat tím, co A a B znamenají. Gödel dokonce upozornil na to, že „by se dal vymyslet stroj, který bude generovat tolik správných tvrzení odvozených z axiomů, kolik si přejeme“. Každý student vysokoškolského kurzu matematiky prochází drilem věta-důkaz, věta-důkaz..., tj. musí se naučit několik (desítek, nikoliv tisíců) matematických tvrzení – vět, která mu umožní řešit složité problémy. Jsou to tvrzení dokázaná, a tedy pravdivá. Gödel se zde ocitá ve zlomovém bodě své cesty: chce analyzovat vlastnosti systému všech tvrzení – tedy i těch, která zatím ani nebyla vyslovena a tím méně ani dokázána, a z tohoto hlediska chce analyzovat různé systémy.

## Důkaz neúplnosti

Systém je (a už před Gödelem byl) považován za úplný, jestliže z jeho axiomů lze odvodit všechna pravdivá tvrzení a současně vždy lze rozhodnout, zda platí dané tvrzení, nebo jeho negace. Systém ovšem musí být bezesporný, tj. nemůže v něm být platné tvrzení a současně i platná jeho negace; takový systém by byl bezcenný. Rozum se pravdivosti tvrzení dobírá tím, že tvrzení dokáže jeho odvozením z už známých pravdivých tvrzení. V Gödelově pojetí však pravdivost a dokazatelnost jsou dva různé pojmy, pravdivost tvrzení neznamena jen to, že tvrzení lze dokázat, tj. logicky odvodit z axiomů. Otázka „existují snad systémy, v nichž jsou některá pravdivá tvrzení nedokazatelná?“ nás zavádí na „okraj říše rozumu“. Za hranicí této říše jsou systémy s určitými pravdivými tvrzeními, k nimž se však rozum nemůže dokazatelností dobrat. Tuto problematiku popisuje Stephen Budiansky v podkapitole s výmluvným názvem „Dokazatelně nedokazatelné“, který je součástí 4. kapitoly nazvané „Vznášející se ve vzduchu“ (rozuměj: vznášející se základy matematiky). Matematika se neobejde bez práce s nekonečnými množinami (tj. majícími

nekonečný počet prvků) a ty mají své „základnosti“ – paradoxy (např. část nekonečné množiny může mít naprosto stejný počet prvků jako celá množina, z níž jsme onu část vybrali), které mají překvapivé důsledky. Právě tím vstoupil Gödel do dějin: opravdu dokázal, že určité matematické teorie (tj. systémy tvrzení zahrnující aritmetiku a vybudované i z těch nekonečných množin – v této recenzi však není prostor na jejich specifikaci) buď nejsou bezesporné (tj. z jejich axiomů jsou dokazatelná nějaká tvrzení a současně i jejich negace), nebo nejsou úplně, tedy existují v nich pravdivá tvrzení, která v nich však nejsou z jejich axiomů dokazatelná. Pravdivost a dokazatelnost jsou tedy dva různé koncepty. Doplnil to ještě tím, že nelze rozhodnout, zda takové systémy jsou bezesporné či nikoli. To vedlo ke změně náhledu na matematiku: po Gödelovi už ji nelze pojímat jako systém tvrzení logicky vyvoditelných z určité množiny axiomů.

Samořejmě, že důkaz těchto Gödelových tvrzení není jednoduchý, právě jako není snadné odpovědět na otázku „z čeho vyplývá pravdivost těch nedokazatelných tvrzení“. Zde nelze než odkázat na Gödelův důkaz. Budiansky dává čtenáři nahlédnout do jeho principu, v dodatku dokonce se značnou detailností.

Když Gödel obhájil v roce 1931 svou disertaci, bylo mu pouhých 25 let, a život měl tedy před sebou. Budiansky popisuje, jak se nad Evropou začínala stahovat nacistická mračna. V roce 1933 se Gödel vzdal československého občanství. Atmosféra ve Vídni antijudaisticky houstla a na Gödela (ač nebyl Žid) těžce dopadala. Přátelé ho pozvali do nově založeného Ústavu pro pokročilá studia v Princetonu. Tento ústav, financovaný ze soukromých prostředků, byl jakýmsi refugiem pro evropské vědce, kteří utíkali před nacismem. Gödel zde měl příležitost spřátelit se s mnoha vědeckými osobnostmi a přes počáteční váhání zde nakonec našel svůj domov. Pojilo ho hluboké přátelství s Albertem Einsteinem, Johnem von Neumannem – oba si Gödela velmi vážili. Gödel zde přišel s originálním řešením Einsteinových kosmologických rovnic a pokračoval ve svých studiích o základech matematiky (usiloval např. o důkaz hypotézy kontinua).

Autor líčí obsáhle, ale nesmírně čtivě, čím vším Gödel procházel kvůli své složité povaze. Ta se mimo jiné projevovala jakousi nedůvěrou v akademické instituce (čemuž se po jeho zkušenostech z Vídne nelze divit). Ani přátelské prostředí Princetonu, ani šťastné manželství však nezabránilo prohlubující se paranoie, nevěřil naléhání svých přátel, aby se léčil, nevěřil svému doktorovi, pronásledoval ho strach, že mu kdekdo škodí, odmítal se normálně stravovat, a tak největší světový logik zemřel na absolutní podvýživu 14. ledna 1978. Tento den byl stanoven jako Světový den logiky.

### LITERATURA:

[1] Stephen Budiansky: Na okraji rozumu. Život Kurta Gödela, Host, 2023.